Prof. Dr. Ulrich Horst
Jana Bielagk WS 2017/18

Lösungen zur Vorlesung
Analysis I*

Serie 2

1) Wir beweisen die Behauptung mittels einer vollständigen Induktion über die Anzahl n der Elemente von A.

Induktionsanfang: Sei $n = 1$, d.h. A besteht aus einem Element $A = \{x_1\}$. Dann erfüllt offensichtlich $x_{min} = x_1 = x_{max}$ die Anforderungen.

Induktionsschritt: Die Behauptung gelte für *beliebige* n-elementige Teilmengen von $\mathbb{R}$ (IV). Wir wollen zeigen, dass sie dann auch für alle $(n + 1)$-elementigen Teilmengen von $\mathbb{R}$ folgt.

Sei also $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}\}$, $x_i \in A$. Wir nehmen das Element x_{n+1} heraus und erhalten die n-elementige Menge $A \setminus \{x_{n+1}\}$. Diese hat nach Induktionsvoraussetzung ein größtes Element $\hat{x}_{max}$ und ein kleinstes Element $\hat{x}_{min}$, d.h. $\hat{x}_{min} \leq x_i \leq \hat{x}_{max}$ $\forall 1 \leq i \leq n$.

Da $\mathbb{R}$ angeordnet ist, gilt entweder $x_{n+1} < \hat{x}_{min}$ oder $\hat{x}_{min} \leq x_{n+1}$. Im ersten Fall ist $x_{min} := x_{n+1}$ das kleinste Element von A (Transitivität von '$\leq$'), im zweiten Fall ist $x_{min} := \hat{x}_{min}$ das kleinste Element.

Analog gilt entweder $\hat{x}_{max} < x_{n+1}$ oder $x_{n+1} \leq \hat{x}_{max}$. Im ersten Fall ist $x_{max} := x_{n+1}$ das größte Element von A, ansonsten $x_{max} := \hat{x}_{max}$.

2) a) Es ist $nx = n^2 + 1 \Leftrightarrow \quad x = \frac{n^2+1}{n} = n + \frac{1}{n}$, daher definieren wir für $n \in \mathbb{N}$ $x_n := n + \frac{1}{n}$, dann ist $M = \{x_n | n \in \mathbb{N}\}$, insbesondere ist M also abzählbar. Nun ist

$$x_{n+1} - x_n = (n+1) + \frac{1}{n+1} - n - \frac{1}{n} = \frac{n(n+1) - 1}{n(n+1)} > 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, daher ist $x_1 = 2$ eine untere Schranke von M und da $x_1 \in M$ ist, ist es sogar die größte untere Schranke, d.h. $x_1 = 2 = \inf M = \min M$. Nach oben ist M unbeschränkt:

Aus (A2) folgt, dass $x_n > n$ ist. Nach der Archimedischen Eigenschaft von $\mathbb{R}$ gibt es zu jedem $x \in \mathbb{R}$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > x$, also insbesondere $x_n > n > x$. Damit kann die Menge M kein (endliches) Supremum haben.

b) Da die Mengen A und B nach Voraussetzung beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}^+$ sind, gilt $\sup A, \sup B, \sup(A \cdot B) \in \mathbb{R}^+$.

(i) $\sup A \cdot \sup B$ ist eine obere Schranke der Menge $A \cdot B$: Sei $x \in A \cdot B$ beliebig, dann existieren $a \in A$ und $b \in B$ mit $x = a \cdot b$. Nach Definition des Supremums gilt $a \leq \sup A,\ \forall a \in A$ und da $b > 0$ folgt $ab \leq (\sup A) \cdot b$. Weiterhin folgt analog, da $\sup A > 0$, dass

$$x = ab \leq (\sup A) \cdot b \leq \sup A \sup B$$

und somit, dass $\sup A \sup B$ eine obere Schranke für $A \cdot B$ ist.

(ii) $\sup(A \cdot B)$ ist (per Definition) die kleinste obere Schranke für $A \cdot B$, daher ist $\sup(A \cdot B) \leq \sup A \cdot \sup B$.

(iii) Gilt für ein $x \in \mathbb{R}$, dass $a \leq x$ ist für alle $a \in A$, dann ist x eine obere Schranke von A. Folglich ist $\sup A \leq x$.

(iv) Zuletzt zeigen wir $\sup A \cdot \sup B \leq \sup(A \cdot B)$: Da A und B Teilmengen von $\mathbb{R}^+$ sind, gilt für jedes $a \in A$:

$$\sup(A \cdot B) \geq \sup(a \cdot B) = a \cdot \sup B, \tag{1}$$

wobei $a \cdot B = \{a \cdot b | b \in B\}$ ist. Ist $\sup B = 0$, so ist nichts zu zeigen. Andernfalls folgern wir aus 1, dass $a \leq \frac{\sup(A \cdot B)}{\sup B}$ ist für alle $a \in A$, also folgt mit der vorherigen Überlegung (iii) dass $\sup A \leq \frac{\sup(A \cdot B)}{\sup B}$ und daraus folgt die Behauptung.

c) Behauptung: $\sup\{\, \sup A_i \mid i \in \Lambda\} = \sup\left(\bigcup_{i \in \Lambda} A_i\right)$.

(i) $\sup\{\, \sup A_i \mid i \in \Lambda\}$ ist eine obere Schranke von $\bigcup_{i \in \Lambda} A_i$, denn sei $a \in \bigcup_{i \in \Lambda} A_i$. Dann gibt es ein $i_0 \in \Lambda$ mit $a \in A_{i_0}$ und es gilt:

$$a \ \leq \sup A_{i_0} \ \leq \ \sup\{\, \sup A_i \mid i \in \Lambda\}$$

(ii) Fixieren wir $i_0 \in \Lambda$, dann ist $A_{i_0} \subset \bigcup_{i \in \Lambda} A_i$, also $\sup A_{i_0} \leq \sup\left(\bigcup_{i \in \Lambda} A_i\right)$. Definieren wir $S := \{\sup A_i | i \in \Lambda\}$, dann ist also $s \leq \sup\left(\bigcup_{i \in \Lambda} A_i\right)$ für alle $s \in S$. Mit Überlegung (iii) aus b) folgern wir, dass $\sup S \leq \sup\left(\bigcup_{i \in \Lambda} A_i\right)$ ist, und das ist die Behauptung.

3) i) Wir beweisen die Behauptung durch vollständige Induktion über n.

Induktionsanfang. Fall $n = 1$: $A = A_1$ ist nach Annahme abzählbar.

Induktionsschritt:

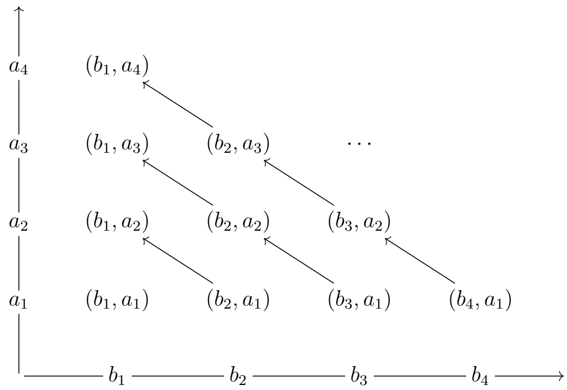
Induktionsvoraussetzung: Für ein n gelte, dass alle Produktmengen von n abzählbaren Mengen wieder abzählbar sind.

Induktionsbehauptung: Dann gilt dies auch für $n + 1$ abzählbare Mengen.

Induktionsbeweis: Es ist $A_1 \times \cdots \times A_{n+1} = (A_1 \times \cdots A_n) \times A_{n+1}$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $A_1 \times \cdots A_n$ aber abzählbar. Wir können $A_1 \times \cdots \times A_n$ und A_{n+1} also schreiben als

$$\begin{aligned} A_1 \times \cdots \times A_n &= \{b_1, b_2, b_3, \ldots\} \\ A_{n+1} &= \{a_1, a_2, a_3, \ldots\} \end{aligned}$$

Wir werden nun ähnlich vorgehen wie bei dem Beweis, dass die rationalen Zahlen abzählbar sind. Wir schreiben dazu die Elemente $(b_i, a_j) \in A_1 \times \cdots A_n \times A_{n+1}$ in ein Diagramm, wobei wir nach rechts die Elemente von $A_1 \times \cdots \times A_{n+1}$ abtragen und nach oben die Elemente von A_{n+1}:



Wir wollen die zu dieser Abzählvorschrift gehörige Abbildung nun aufschreiben: Wir bemerken dazu, dass auf den eingezeichneten Diagonalen jeweils die Summe der Indizes konstant ist, d.h. wenn (b_i, a_j) und (b_k, a_l) auf der selben Diagonalen stehen, so ist $i+j = k+l$ und auf dieser Diagonalen stehen $i+j-1$ Elemente. Wenn wir nun von links unten nach rechts oben allen Diagonalen folgen und die Diagonalen jeweils in Pfeilrichtung abarbeiten so gilt Folgendes: Kommen wir bei einem Element (b_i, a_j) an, so haben wir bereits alle Diagonalen mit kleineren Summen abgearbeitet und dabei $\sum_{k=2}^{i+j-1}(k-1)$ Elemente passiert. Auf der aktuellen Diagonalen ist (b_i, a_j) der j-te Eintrag. Insgesamt könne wir also eine Bijektion wie folgt angeben:

$$\begin{aligned} f : A_1 \times \cdots A_n \times A_{n+1} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (b_i, a_j) &\longmapsto \sum_{k=2}^{i+j-1} (k-1) + j \end{aligned}$$

Dass dies tatsächlich eine Bijektion ist, ergibt sich aus der Konstruktion. $\square$

ii) *Behauptung:* Jede unendliche Menge M enthält eine abzählbare Teilmenge $M_0 \subset M$ so dass M gleichmächtig zu $M \setminus M_0$ ist.

Beweis: Wir beweisen dies in zwei Schritten: Wir zeigen zunächst, dass M stets eine abzählbare Teilmenge enthält und konstruieren aus dieser dann eine Menge M_0 mit den geforderten Eigenschaften.

Erster Schritt: Zeigen: M enthält eine abzählbare Teilmenge

Sei M eine unendliche Menge. Wir fixieren ein Element $x_1 \in M$. Offensichtlich ist $M_1 = M \setminus \{x_1\}$ ebenfalls eine unendliche Menge, wir können also wieder ein Element $x_2 \in M_1$ auswählen und $M_2 = M_1 \setminus \{x_2\}$ ist unendlich. Diese Verfahren lässt sich beliebig oft wiederholen: Wenn wir $\{x_1, ..., x_k\}$ bereits konstruiert haben und $M_k = M \setminus \{x_1, ..., x_k\}$ unendlich ist, so können wir x_{k+1} aus M_k wählen und $M_{k+1} = M_k \setminus \{x_{k+1}\}$ ist weiterhin unendlich[1].

Wir erhalten also insgesamt eine abzählbare Menge $A = \{x_1, x_2, ...\} \subset M$.

Zweiter Schritt: Sei $A = \{x_1, x_2, ...\} \subset M$ abzählbar. Dann setze

$$\begin{aligned} A_0 &= \{x_2, x_4, x_6, ...\} \\ M_0 &= \{x_1, x_3, x_5, ...\}. \end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass M gleichmächtig zu $M \setminus M_0$ ist, d.h., es existiert eine Bijektion zwischen beiden Mengen. Nach Konstruktion ist $A = A_0 \cup M_0$ und die Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon A &\longrightarrow A_0 \\ x_n &\longmapsto x_{2n} \end{aligned}$$

ist bijektiv. Weiterhin ist $M = A \dot{\cup} (M \setminus A)$ und $M \setminus M_0 = A_0 \dot{\cup} (M \setminus A)$. Wir definieren nun eine Abbildung

$$\begin{aligned} \phi : M &\longrightarrow M \setminus M_0 \\ x &\longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in A \\ x & \text{falls } x \in M \setminus A \end{cases} \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist bijektiv, da $f\colon A \to A_0$ und $\mathrm{id}\colon M \setminus A \to M \setminus A$ bijektiv auf disjunkten Teilmengen sind.

4) Benutzt werden dürfen

(1) die Definition der n-ten Wurzel ($n \in \mathbb{Z}$) von $x \in \mathbb{R}_+$,

(2) $(\sqrt[n]{x})^n = x$ für $n \in \mathbb{Z}$ (folgt aus (1)),

(3) die Eigenschaften ganzzahliger Potenzen ($x^n \cdot x^m = x^{n+m}, x^{n \cdot m} = (x^n)^m, (x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$ für $x, y \in \mathbb{R}_+$, $n, m \in \mathbb{Z}$) und

(4) die Definition von x^q für $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ als $x^q := (\sqrt[n]{x})^m$.

Zu den Beweisen:

i) Nach (1) ist $y := \sqrt[rm]{x}$ die eindeutige Lösung von $x = y^{rm}$. Zudem ist auch $y' := \sqrt[r]{\sqrt[m]{x}}$ ebenfalls Lösung dieser Gleichung, so dass beide übereinstimmen. Damit ist

$$(\sqrt[rm]{x})^{rn} = \left(\sqrt[r]{\sqrt[m]{x}}\right)^{rn} = \left(\left(\sqrt[r]{\sqrt[m]{x}}\right)^r\right)^n \overset{(2)}{=} (\sqrt[m]{x})^n \text{ und}$$

$$\left((\sqrt[m]{x})^n\right)^m \overset{(3)}{=} (\sqrt[m]{x})^{nm} \overset{(3)}{=} \left((\sqrt[m]{x})^m\right)^n \overset{(2)}{=} x^n \overset{(1)}{\Rightarrow} (\sqrt[m]{x})^n = \sqrt[m]{x^n}.$$

[1]Diese Art, die x_k zu konstruieren nennt man auch induktive Konstruktion. Man beachte die Ähnlichkeit zum Beweisprinzip der vollständigen Induktion.

ii) O.B.d.A. seien $q = \frac{n_1}{m}$, $p = \frac{n_2}{m}$, $m \in \mathbb{N}_1$, $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. Dann ist unter Benutzung der Rechenregeln für Brüche

$$x^q x^p \overset{(4)}{=} (\sqrt[m]{x})^{n_1} (\sqrt[m]{x})^{n_2} \overset{(3)}{=} (\sqrt[m]{x})^{n_1+n_2} \overset{(4)}{=} x^{\frac{n_1+n_2}{m}} = x^{\frac{n_1}{m}+\frac{n_2}{m}} = x^{q+p} \text{ und}$$

$$(x^q)^p \overset{(4)}{=} \left(\sqrt[m]{(\sqrt[m]{x})^{n_1}}\right)^{n_2} \overset{i)}{=} \left(\left(\sqrt[m]{\sqrt[m]{x}}\right)^{n_1}\right)^{n_2} \overset{i),(3)}{=} (\sqrt[m^2]{x})^{n_1 n_2} \overset{(4)}{=} x^{\frac{n_1 n_2}{m^2}} = x^{pq}.$$

iii) O.B.d.A. sei $q = \frac{n}{m}$ mit $m \in \mathbb{N}_1$ und $n \in \mathbb{Z}$. Dann ist

$$x^q y^q \overset{(4)}{=} \left(\sqrt[m]{x}\right)^n \left(\sqrt[m]{y}\right)^n \overset{(3)}{=} \left(\sqrt[m]{x}\,\sqrt[m]{y}\right)^n \overset{(*)}{=} \left(\sqrt[m]{xy}\right)^n \overset{(4)}{=} (xy)^q.$$

Zu $(*)$:

$$\begin{aligned}(\sqrt[m]{x}\,\sqrt[m]{y})^m &\overset{(3)}{=} (\sqrt[m]{x})^{\cdot} (\sqrt[m]{y})^m \overset{(2)}{=} x \cdot y,\\ (\sqrt[m]{xy}) &\overset{(2)}{=} xy,\end{aligned}$$

also gilt auf Grund der Eindeutigkeit der m-ten Wurzel $\sqrt[m]{x}\,\sqrt[m]{y} = \sqrt[m]{xy}$ für bel. $x, y \in \mathbb{R}_+$ und $m \in \mathbb{N}$.

iv) **Behauptung:** Sind $a, b \geq 0$, dann gilt $a \leq b \iff a^n \leq b^n$.
Beweis: Mit

$$a^n - b^n = (a-b) \cdot \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} a^j b^{n-1-j}}_{\geq 0},$$

folgt, dass $a - b \leq 0$ genau dann gilt, wenn $a^n - b^n \leq 0$ ist und mit (M1) aus Serie 1 Aufg. 4 folgt die Behauptung.

Zum eigentlichen Beweis:

Beide Seiten der Ungleichung sind positiv, daher ist die behauptete Ungleichung nach obigen Überlegungen äquivalent zu

$$x + y \leq \left(\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y}\right)^n. \tag{2}$$

Wir beweisen nun Ungleichung (2): Es ist

$$\begin{aligned} x + y &\leq x + y + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \left(\sqrt[n]{x}\right)^k \left(\sqrt[n]{y}\right)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\sqrt[n]{x}\right)^k \left(\sqrt[n]{y}\right)^{n-k} \\ &= \left(\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y}\right)^n, \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung aus dem Binomischen Lehrsatz folgt. Dies beweist die Behauptung.