Prof. Dr. Ulrich Horst
Jana Bielagk

WS 2017/18

Lösungen zur Vorlesung
Analysis I*

Serie 3

1) a) Wir erweitern $z_1 = \frac{2+i}{1-3i}$ mit dem komplex konjugierten des Nenners und erhalten:

$$z_1 = \frac{2+i}{1-3i} = \frac{(2+i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} = \frac{2+i+6i+3i^2}{1-(3i)^2} = \frac{-1+7i}{1+9} = -\frac{1}{10} + i\frac{7}{10}.$$

Analog erhalten wir für $z_2 = \frac{1+3i}{1-i}$:

$$z_2 = \frac{1+3i}{1-i} = \frac{(1+3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+4i+3i^2}{1-i^2} = \frac{-2+4i}{2} = -1+2i$$

und durch Anwendung des Binomischen Lehrsatzes ergibt sich

$$\begin{aligned}
z_2^4 &= (-1+2i)^4 \\
&= \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} (2i)^k (-1)^{4-k} \\
&= 1 - \binom{4}{1} 2i + \binom{4}{2} (2i)^2 - \binom{4}{3} (2i)^3 + \binom{4}{4} (2i)^4 \\
&= 1 - 8i - 24 + 4 \cdot 8i + 16 \\
&= -7 + 24i.
\end{aligned}$$

b) Zeichnen Sie die folgenden Mengen in der Gauß'schen Zahlenebene:

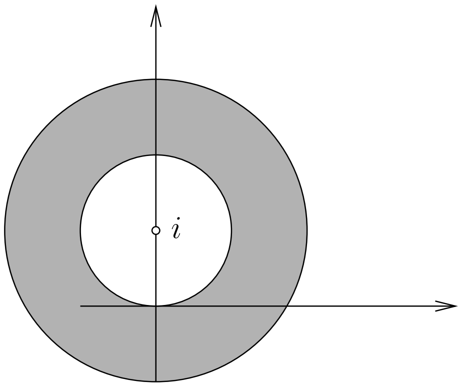
i) $M_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| = |z+1|\}$: Anschaulich wird die Menge M_1 sofort offensichtlich, wenn wir ihre Definition in Worte fassen: sie besteht aus den Punkten der Gaußschen Zahlenebene, die von Punkten $p_+ = 1$ und $p_- = -1$ gleichweit entfernt sind, also der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{p_+p_-}$. Das ist gerade die imaginäre Achse. Formal zeigt man das wie folgt:

$$\begin{aligned}
z \in M_1 \quad &\Leftrightarrow \quad |z-1| = |z+1| \\
&\Leftrightarrow \quad |z-1|^2 = |z+1|^2 \\
&\Leftrightarrow \quad (z-1)(\bar{z}-1) = (z+1)(\bar{z}+1) \\
&\Leftrightarrow \quad z\bar{z} - z - \bar{z} + 1 = z\bar{z} + z + \bar{z} + 1 \\
&\Leftrightarrow \quad -(z+\bar{z}) = z + \bar{z} \\
&\Leftrightarrow \quad z + \bar{z} = 2\Re z = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad z \text{ ist rein imaginär}
\end{aligned}$$

ii) $M_2 = \{z \in \mathbb{C} \;\mid\; 1 < |z-i| < 2\}$: Auch hier hilft eine Übersetzung ins umgangssprachliche: M_2 besteht aus den Punkten der Gaußschen Zahlenebene, deren Abstand zum 'Punkt' i grösser als 1 aber kleiner als 2 ist, also entspricht M_2 einem *Kreisring* um i mit innerem Radius 1 und äußerem Radius 2. Vielleicht sollte man hier nochmal betonen, dass der komplexe Betrag $|z-w|$ dem normalen (Euklidischen) Abstand in der (Gaußschen) Ebene entspricht:

$$|z-w| = \sqrt{(\Re z - \Re w)^2 + (\Im z - \Im w)^2}$$

wobei $(\Re z, \Im z)$ gerade die Koordinaten des Punktes z in der (Gaußschchen) Ebene sind.



2) Beweisen Sie, dass für zwei komplexe Zahlen z, w das folgende Parallelogramm-Gesetz gilt:

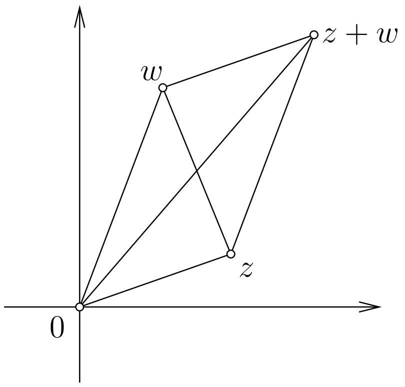
$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2).$$

Was bedeutet diese Formel geometrisch?

Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned}
|z+w|^2 + |z-w|^2 =& (z+w)\overline{(z+w)} + (z-w)\overline{(z-w)} \\
=& (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) + (z-w)(\overline{z}-\overline{w}) \\
=& z\overline{z} + w\overline{w} + z\overline{w} + w\overline{z} + z\overline{z} + w\overline{w} - w\overline{z} - z\overline{w} \\
=& 2(z\overline{z} + w\overline{w}) \\
=& 2(|z|^2 + |w|^2)
\end{aligned}$$

Zur geometrischen Deutung: Die Punkte $0, z, w, z+w$ bilden in der Gaußschen Zahlenebene ein Parallelogramm:



- $|z+w|$ ist die Länge der Diagonalen von 0 bis $z+w$.
- $|z-w|$ ist die Länge der Diagonalen von z bis w.
- $|z|$ bzw. $|w|$ sind die Längen der Seiten.

Das Parallelogrammgesetz besagt nun: *Die Summe der Quadrate der Diagonalen eines Parallelogramms ist gleich der Summe der Quadrate aller Seiten.*

3) Zeigen Sie: (X, d) mit $X = \mathbb{R}^2$ und

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

ist ein metrischer Raum.

Seien im Folgenden $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ und $z = (z_1, z_2)$ Elemente des Raumes, d.h. $x, y, z \in X$.

Positivität:

$d(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} \geq |x_1 - y_1| \geq 0$ und
$d(x, y) = 0 \iff \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} = 0 \iff |x_1 - y_1| = 0$ und $|x_2 - y_2| = 0$.

Es gilt $|x_1 - y_1| = 0$ genau dann, wenn $x_1 = y_1$ ist (wir wissen ja schon, dass $D(x, y) = |x - y|$ eine Metrik auf $\mathbb{R}$ definiert). Ebenso gilt $|x_2 - y_2| = 0$ genau dann, wenn $x_2 = y_2$ ist, also insgesamt: $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$ ist.

Symmetrie:

$$d(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} \overset{(*)}{=} \max\{|y_1 - x_1|, |y_2 - x_2|\} = d(y, x),$$

wobei wir bei $(*)$ benutzt haben, dass $|a - b| = |b - a|$ ist für $a, b \in \mathbb{R}$.

Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned}
d(x, z) &= \max\{|x_1 - z_1|, |x_2 - z_2|\} \\
&\leq \max\{|x_1 - y_1| + |y_1 - z_1|, |x_2 - y_2| + |y_2 - z_2|\} \\
&\overset{(**)}{\leq} \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} + \max\{|y_1 - z_1|, |y_2 - z_2|\} \\
&= d(x, y) + d(y, z).
\end{aligned}$$

Für $(**)$ haben wir etwas benutzt, was wir an dieser Stelle zeigen:

Behautpung: $\max\{a + b, c + d\} \leq \max\{a, c\} + \max\{b, d\}$.

Beweis: Mit $\max\{a,b\} = \frac{1}{2}(a+b+|a-b|)$ ist

$$\begin{aligned}
\max\{a+b, c+d\} &= \frac{1}{2}(a+b+c+d+|(a+b)-(c+d)|) \\
&= \frac{1}{2}\left[(a+c)+(b+d)+|(a-c)+(b-d)|\right] \\
&\le \frac{1}{2}\left[(a+c)+(b+d)+|(a-c)|+|(b-d)|\right] \\
&= \frac{1}{2}(a+c+|a-c|) + \frac{1}{2}(b+d+|b-d|) \\
&= \max\{a,c\} + \max\{b,d\}.
\end{aligned}$$

Zeigen wir zuletzt, dass in der Tat $\max\{a,b\} = \frac{1}{2}(a+b+|a-b|)$ ist für alle $a, b \in \mathbb{R}$: Dazu machen wir eine Fallunterscheidung:

1. Fall: $a \ge b$**:** Dann ist $\max\{a,b\} = a = \frac{1}{2}(\underbrace{a+b+(a-b)}_{=2a})$.

2. Fall: $a < b$**:** Dann ist $\max\{a,b\} = b = \frac{1}{2}(\underbrace{a+b+(b-a)}_{=2b})$.

Damit ist diese Behauptung gezeigt.

4) i) Zeigen Sie, dass für $x, y \in \mathbb{C}$ gilt: $|\langle x, y\rangle| = |x| \cdot |y|$.
Beweis: $|\langle x,y\rangle| = |x \cdot \bar{y}| = |x| \cdot |\bar{y}| = |x| \cdot |y|$ nach den Regeln für komplexe Zahlen.

ii) Sei (X, d) ein metrischer Raum und seien $w, x, y, z \in X$. Zeigen Sie, dass die Vierecksungleichung gilt:

$$|d(w,x) - d(y,z)| \le d(w,y) + d(x,z).$$

Beweis: 1. Fall: $d(w,x) \ge d(y,z)$:

$$\begin{aligned}
|d(w,x) - d(y,z)| &= d(w,x) - d(y,z) \\
&\le d(w,y) + d(y,x) - d(y,z) \quad \text{(Dreiecksungleichung)} \\
&= d(w,y) + d(x,z) - d(x,z) + d(y,x) - d(y,z) \\
&= d(w,y) + d(x,z) - [d(x,z) + d(z,y)] + d(x,y) \\
&\le d(w,y) + d(x,z) - d(x,y) + d(x,y) \quad \text{(Dreiecksungleichung)} \\
&= d(w,y) + d(x,z).
\end{aligned}$$

Dabei haben wir neben der Dreiecksungleichung auch die Symmetrie der Metrik und die Körpereigenschaften von $\mathbb{R}$ benutzt (KG, AG, DG).

2. Fall: $d(w,x) < d(y,z)$:

$$\begin{aligned}
|d(w,x) - d(y,z)| &= d(y,z) - d(w,x) \\
&\leq d(y,w) + d(w,z) - d(w,x) \quad \text{(Dreiecksungleichung)} \\
&= d(y,w) + d(x,z) - d(x,z) + d(w,z) - d(w,x) \\
&= d(w,y) + d(x,z) - [d(w,x) + d(x,z)] + d(w,z) \\
&\leq d(w,y) + d(x,z) - d(w,z) + d(w,z) \quad \text{(Dreiecksungleichung)} \\
&= d(w,y) + d(x,z).
\end{aligned}$$

Damit ist die Vierecksungleichung bewiesen.