Prof. Dr. Ulrich Horst
Jana Bielagk WiSe 2017/18

Lösungen zur Vorlesung

Analysis I*

Serie 8

1) Sei $\mathcal{F}$ der Vektorraum der reellen Folgen und ℓ^2 die Teilmenge

$$\ell^2 = \left\{ (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F} \mid \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty \right\}.$$

a) Zeigen Sie, dass ℓ^2 ein Untervektorraum des Vektorraumes $\mathcal{F}$ ist.

b) Für $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}, (y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ sei

$$\|(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\|_2 := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{und}$$
$$\langle (x_k)_{k\in\mathbb{N}}, (y_k)_{k\in\mathbb{N}} \rangle := \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot y_k.$$

Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_2$ eine Norm und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf ℓ^2 ist.

c) Zeigen Sie, dass $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$ ein Banachraum und $(\ell^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum ist.

Hinweise:

Zu a) Um zu zeigen, dass ℓ^2 ein Untervektorraum ist, muss nachgewiesen werden, dass ℓ^2 nicht leer ist und dass für $x, y \in \ell^2$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ auch $x + y \in \ell^2$ und $\lambda x \in \ell^2$ sind.

Zu b) Die Ergebnisse aus Serie 6 Aufgabe 4 dürfen verwendet werden. Die Ungleichung a) jener Aufgabe nennt man *Hölder-Ungleichung* und die Ungleichung b) *Minkowski-Ungleichung.*

Lösung[1]**:**

Wir benutzen in dieser Aufgabe die folgenden Bezeichnungen: Ein Element von ℓ^2 bezeichnen wir mit $\mathbb{x}, \mathbb{y}$ etc. Diese Elemente sind Folgen und wir bezeichnen ihre Glieder mit $x_1, x_2, ...$ bzw $y_1, y_2, ...$

zu a) *Behauptung:* ℓ^2 ist ein Unterraum des Vektorraums $\mathcal{F} = \{\text{reelle Folgen}\}$

Beweis: Um zu zeigen, dass ℓ^2 ein Untervektorraum ist, müssen wir nachweisen, dass ℓ^2 nicht leer ist und dass für $\mathbb{x}, \mathbb{y} \in \ell^2$ auch $\mathbb{x} + \mathbb{y} \in \ell^2$ und $\lambda\mathbb{x} \in \ell^2$.

[1] Die Nummern der Sätze beziehen sich auf das Skript von Frau Baum.

- ℓ^2 ist nicht leer, da $(0, 0, ...) \in \ell^2$ ist.
- Zeige: $\mathbb{x} + \mathbb{y} \in \ell^2$. Dazu ist zu zeigen, dass $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^2 < \infty$.
  Wir betrachten die endlichen Partialsummen $\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|$. Für diese gilt nach der Minkowski-Ungleichung aus Serie 6 Aufgabe 4, dass

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|\mathbb{x}\|_2 + \|\mathbb{y}\|_2.$$

  Die Folge der Partialsummen $(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^2)_n$ ist also nach oben beschränkt. Andererseits ist sie offensichtlich monoton wachsend. Somit ist sie nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass konvergent, was gleichbedeutend ist mit $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^2 < \infty$
- Zeigen: $\lambda\mathbb{x} \in \ell^2$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.
  Nach Satz 3.4 gilt für $\mathbb{x} \in \ell^2$ und $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda x_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda|^2 \cdot |x_k|^2 = |\lambda|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty,$$

  also ist $\lambda\mathbb{x} \in \ell^2$.

Damit ist beweisen, dass ℓ^2 ein Untervektorraum von $\mathcal{F}$ ist.

zu b) *Behauptung:* Durch $\|\cdot\|_2$ und $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ sind eine Norm und ein Skalarprodukt auf ℓ^2 gegeben.

Beweis: Es ist offensichtlich $\|\mathbb{x}\|_2 = \sqrt{\langle \mathbb{x}, \mathbb{x}\rangle_2}$. Somit genügt es, zu zeigen, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ ein Skalarprodukt ist, die Normeigenschaft folgt dann aus Satz 2.45.

Wir beweisen nun also, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ ein Skalarprodukt auf ℓ^2 ist. Wir zeigen zunächst, dass die Abbildung

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_2 \colon \ell^2 \times \ell^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

wohldefiniert ist, d.h. dass die definierende Reihe konvergiert. Wir zeigen dazu, dass sie sogar absolut-konvergent ist, dies impliziert nach Satz 3.3 die Konvergenz. Um die absolute Konvergenz nachzuweisen, betrachten wir die n-te Partialsumme der Reihe der Beträge. Für diese gilt nach der in Serie 6 Aufgabe 4 bewiesenen Hölder-Ungleichung für $p = q = 2$:

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \cdot |y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|\mathbb{x}\|_2 \cdot \|\mathbb{y}\|_2$$

Die Folge der Partialsummen $\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k|$ ist also von oben beschränkt und monoton wachsend, also konvergent.

Nun ist zu zeigen, dass diese Abbildung tatsächlich ein Skalarprodukt ist, d.h. es ist folgendes zu überprüfen:

i) $\langle \mathbb{x}, \mathbb{y}\rangle_2 = \langle \mathbb{y}, \mathbb{x}\rangle_2$ für alle $\mathbb{x}, \mathbb{y} \in \ell^2$

ii) $\langle \mathbb{x} + \mathbb{y}, \mathbb{z}\rangle_2 = \langle \mathbb{x}, \mathbb{z}\rangle_2 + \langle \mathbb{y}, \mathbb{z}\rangle_2$ für alle $\mathbb{x}, \mathbb{y}, \mathbb{z} \in \ell^2$

iii) $\langle \lambda\mathbb{x}, \mathbb{y}\rangle_2 = \lambda\langle \mathbb{x}, \mathbb{y}\rangle_2$ für alle $\mathbb{x}, \mathbb{y} \in \ell^2,\ \lambda \in \mathbb{R}$

iv) $\langle \mathbb{x}, \mathbb{x}\rangle_2 \geq 0$ für alle $\mathbb{x} \in \ell^2$ und $\langle \mathbb{x}, \mathbb{x}\rangle_2 = 0 \Leftrightarrow \mathbb{x} = 0$

Wir weisen dies nun nach:

i) Diese Eigenschaft folgt sofort aus der Definition, weil $x_k y_k = y_k x_k$.

ii) Nach Satz 3.4 der Vorlesung gilt

$$\langle \mathbb{x}+\mathbb{y}, \mathbb{z}\rangle_2 = \sum_{k=1}^{\infty}(x_k+y_k)z_k = \sum_{k=1}^{\infty}(x_k z_k+y_k z_k) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k z_k+\sum_{k=1}^{\infty} y_k z_k = \langle \mathbb{x}, \mathbb{z}\rangle_2+\langle \mathbb{y}, \mathbb{z}\rangle_2.$$

iii) Ebenfalls nach Satz 3.4 gilt

$$\langle \lambda\mathbb{x}, \mathbb{y}\rangle_2 = \sum_{k=1}^{\infty}(\lambda x_k)y_k = \lambda\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k = \lambda\langle \mathbb{x}, \mathbb{y}\rangle_2.$$

iv) Da $x_k^2 \geq 0$ folgt, dass $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \geq 0$ und somit gilt diese Ungleichung auch im Limes, d.h. $\langle \mathbb{x}, \mathbb{x}\rangle_2 \geq 0$. Weiterhin gilt

$$\langle \mathbb{x}, \mathbb{x}\rangle_2 = 0 \ \Leftrightarrow\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 0$$

Die Folge ist aber monoton wachsend und die Folgenglieder sind nichtnegativ, also kann der Limes nur null sein, wenn $x_k = 0$ für alle k, d.h. $\mathbb{x} = 0$.

Somit ist nachgewiesen, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ ein Skalarprodukt auf ℓ^2 ist und nach obigen Bemerkungen auch, dass $\|\cdot\|_2$ eine Norm auf ℓ^2 ist.

zu c) *Behauptung:* $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$ ist ein Banachraum und $(\ell^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ ist ein Hilbertraum.

Beweis: Nach Definition von Banach- bzw. Hilberträumen ist zu zeigen, dass der jeweils von Norm bzw. Skalarprodukt induzierte Metrik vollständig ist. In unserem Fall induzieren $\|\cdot\|_2$ und $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ die gleiche Metrik

$$d(\mathbb{x}, \mathbb{y}) = \|\mathbb{x} - \mathbb{y}\|_2 = \sqrt{\langle \mathbb{x} - \mathbb{y}, \mathbb{x} - \mathbb{y}\rangle_2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}|x_k - y_k|^2}$$

d.h. es ist zu zeigen, dass (ℓ^2, d) ein vollständiger metrischer Raum ist.

Sei dazu $(\mathbb{x}^{(n)})$ eine Cauchy-Folge in (ℓ^2, d). Es ist zu zeigen, dass ein $\mathbb{x} \in \ell^2$ existiert, sodass $\mathbb{x}^{(n)} \to \mathbb{x}$. Wir gehen dazu wie für $B(X)$ (Serie 7, Aufgabe 2) wie folgt vor:

i) Wir konstruieren $\mathbb{x}$.

ii) Wir zeigen: $\mathbb{x} \in \ell^2$.

iii) Wir zeigen $\mathbb{x} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{x}^{(n)}$.

Wir führen diese Schritte nun aus:

i) Wir zeigen dazu zunächst, dass die Folge der k-ten Folgenglieder $(x_k^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ (wobei $\mathbb{x}^{(n)} = (x_k^{(n)})_{k=1}^{\infty}$) eine Cauchy-Folge in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ist. Seien dazu $\varepsilon > 0$ und $k \in \mathbb{N}$ beliebig aber fix. Dann ex. ein n_0 sodass

$$\|\mathbb{x}^{(n)} - \mathbb{x}^{(m)}\|_2 < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0. \tag{1}$$

Es ist aber offensichtlich $|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}|^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} |x_j^{(n)} - x_j^{(m)}|^2$ und damit

$$|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}| = \left(|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j^{(n)} - x_j^{(m)}|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$$

für alle $n, m \geq n_0$, die Cauchyfolgen-Bedingung ist also erfüllt. Da die reellen Zahlen mit der Betragsmetrik aber vollständig sind (nach Satz 2.26), ex. ein $x_k \in \mathbb{R}$ mit $x_k = \lim_{n\to\infty} x_k^{(n)}$. Dabei war k beliebig, also können wir definieren:

$$\mathbb{x} := (x_1, x_2, x_3, ...)$$

ii) Wir zeigen nun, dass das eben definierte $\mathbb{x}$ in ℓ^2 liegt, d.h. dass $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty$. Wir betrachten dazu zunächst die n-te Partialsumme. Wir nutzen (1) und erhalten für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ nach der Minkowski-Ungleichung, dass für $m \geq n_0$ gilt:

$$\begin{aligned}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k^{(m)}|^2} &\leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k^{(m)} - x_k^{(n_0)}|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k^{(n_0)}|^2} \\ &\leq \|\mathbb{x}^{(m)} - \mathbb{x}^{(n_0)}\|_2 + \|\mathbb{x}^{(n_0)}\|_2 \\ &< \varepsilon + \|\mathbb{x}^{(n_0)}\|_2.\end{aligned}$$

Weiterhin erhalten wir nach den Grenzwertsätzen

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 &= \sum_{k=1}^{n} \lim_{m\to\infty} |x_k^{(m)}|^2 \\ &= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |x_k^{(m)}|^2 \leq \left(\varepsilon + \|\mathbb{x}^{n_0}\|_2\right)^2.\end{aligned}$$

Somit ist die Folge der Partialsummen von oben beschränkt und monoton wachsend, also konvergent und wir erhalten somit $\mathbb{x} \in \ell^2$.

iii) Wir müssen nun noch zeigen, dass $\mathbb{x}^{(n)} \to \mathbb{x}$. Sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig fixiert. Da $(\mathbb{x}^{(n)})$ eine Cauchy-Folge ist, ex. dann ein n_0 sodass für alle $n, m \geq n_0$ gilt: $\|\mathbb{x}^{(n)} - \mathbb{x}^{(m)}\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$. Insbesondere erhalten wir für jedes $l \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{l} |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}|^2 \leq \|\mathbb{x}^{(n)} - \mathbb{x}^{(m)}\|_2^2 < \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Wir gehen nun bezüglich n zum Grenzwert über und erhalten für alle $m \geq n_0$

$$\sum_{k=1}^{l} |x_k - x_k^{(m)}|^2 = \sum_{k=1}^{l} \left(\lim_{n\to\infty} |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}|^2 \right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{l} |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Wiederum aus den Grenzwertsätzen erhalten wir nun beim Übergang zum Limes bezüglich l:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - x_k^{(m)}|^2 = \lim_{l\to\infty} \sum_{k=1}^{l} |x_k - x_k^{(m)}|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{4}$$

und damit für alle $m \geq n_0$:

$$\|\mathbb{x} - \mathbb{x}^{(m)}\|_2 \leq \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4}} < \varepsilon,$$

was gerade die gewünschte Konvergenz impliziert.

2. a) Zeigen Sie, dass jede nichtleere beschränkte Teilmenge von $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ auch total beschränkt ist.

   Bemerkung: Dies beweist insbesondere den Satz von Heine-Borel:

   Eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

   b) Finden Sie ein Beispiel einer nichtleeren beschränkten Menge, die nicht total beschränkt ist.

Lösung:

a) Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, d.h. es existieren $a \in \mathbb{R}^n$ und $M > 0$ mit $A \subset K(a, M)$. O.B.d.A. $a = 0$. Sei $\varepsilon > 0$. Wir suchen endlich viele Punkte $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ mit $A \subset \bigcup_{k=1}^m K(x_k, \varepsilon)$. Sei

$$\mathcal{M}(k) := \left\{ \left(\frac{z_1}{k}, \dots, \frac{z_n}{k} \right) \in \mathbb{R}^n : \, z_1, \dots, z_n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Für jedes feste $k \in \mathbb{N}$ liegen wegen der Beschränktheit der Menge A nur endlich viele Elemente von $\mathcal{M}(k)$ in A, denn ist $z_i > kM$, dann kann kein Punkt mit i-ter Koordinate $\frac{z_i}{k}$ nicht mehr in A liegen.

Die Diagonale eines n-dimensionalen Würfels mit Seitenlänge $\frac{1}{k}$ hat die Länge $\frac{\sqrt{n}}{k}$. Wegen $\lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{k} = \infty$ kann man k so groß wählen, dass $\frac{\sqrt{n}}{k} < \varepsilon$ ist. Mit einem solchen k gilt dann:

$$A \subset \bigcup_{x \in \mathcal{M}(k) \cap A} K(x, \varepsilon),$$

wobei $\mathcal{M}(k) \cap A$ wie schon bemerkt nur endlich viele Punkte enthält.

Folglich ist A in $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ totalbeschränkt.

b) Ein Beispiel ist (X, d), wobei $X = \mathbb{N}$ und d die diskrete Metrik ist, d.h.

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & , x = y, \\ 1 & , x \neq y \end{cases}, \qquad x, y \in X.$$

Dann ist $K(x, \frac{1}{2}) = \{x\}$, so dass es mit Kugeln mit Radius $\frac{1}{2}$ keine endliche Überdeckung von $\mathbb{N}$ geben kann. Gleichzeitig ist $\mathbb{N}$ bezüglich d beschränkt, denn

$$d(x, y) \leq 1, \; \forall x, y \in \mathbb{N}.$$

3. a) Zeigen Sie, dass jede abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge selbst kompakt ist.

b) Sei S die abgeschlossene Einheitskugel im ℓ^2, d.h.

$$S := \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \|x\|_{\ell^2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq 1 \right\}.$$

Zeigen Sie (möglicherweise unter Verwendung von a), dass S nicht kompakt ist.

Bemerkung: Der Satz von Heine-Borel gilt nur im $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$. Im Allgemeinen folgt, wie hier gesehen, aus Abgeschlossenheit und Beschränktheit einer Menge nicht deren Kompaktheit.

Lösung:

a) Sei K eine kompakte Menge in (X, d). Sei $A \subset K$ eine abgeschlossene Teilmenge von K. Als kompakte Menge ist K nach Satz 2.37 auch folgenkompakt. Jede abgeschlossene Teilmenge einer folgenkompakten Menge (also auch A) ist nach Satz 2.32 ebenfalls folgenkompakt und somit nach Satz 2.37 kompakt.

b) Betrachte die Menge

$$M := \left\{ x^i = (x_n^i)_{n\in\mathbb{N}} : x_n^i = \begin{cases} 1 & , n = i \\ 0 & , n \neq i \end{cases}, \quad i \in \mathbb{N} \right\}.$$

Diese ist eine Teilmenge von S, denn für $x^i \in M$ gilt $\|x^i\|_{\ell^2} = 1$. Die Menge ist zudem beschränkt, denn wenn wir mit 0 die konstante Nullfolge bezeichnen, so gilt $x^i \in K(0, 1)$ für jedes $x^i \in M$. Zeigen wir im Folgenden, dass M abgeschlossen, aber nicht kompakt ist. Nach Teil a) folgt hieraus, dass S nicht kompakt sein kann.

<u>$HP(M) = \emptyset$:</u> Für $i \neq j$ und $x^i, x^j \in M$ gilt

$$\|x^i - x^j\|_{\ell^2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^i - x_n^j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}.$$

Damit ist

$$K(x^i, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \{x^i\} \tag{2}$$

und der Abstand zwischen beliebigen Elementen von M ist identisch. Somit ist jeder Punkt von M ein isolierter Punkt. Also können Häufungspunkte von M höchstens in $\ell^2 \setminus M$ liegen.
Angenommen in $\ell^2 \setminus M$ gäbe es einen Häufungspunkt von M — nennen wir ihn x. Wegen $x \notin M$ gilt $\|x - x^i\|_{\ell^2} > 0$ für alle $x^i \in M$. Nach Annahme

gibt es ein $i^* \in \mathbb{N}$ mit $\|x - x^{i^*}\|_{\ell^2} =: \delta < \frac{\sqrt{2}}{3}$. Ebenso gibt es ein $j^* \in \mathbb{N}$ mit $\|x - x^{j^*}\|_{\ell^2} < \frac{\delta}{2}$. Damit ist jedoch nach Dreiecksungleichung

$$\|x^{i^*} - x^{j^*}\|_{\ell^2} < \delta + \frac{\delta}{2} < \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Dies ist ein Widerspruch zu (2). Dammit ist $HP(M) = \emptyset$ gezeigt.

M ist abgeschlossen: Nach Satz 2.7 ist eine Menge genau dann abgeschlossen, wenn sie ihre Häufungspunkte enthält. Da $HP(M) = \emptyset$ ist, gilt also insbesondere $\overline{M} = HP(M) \cup M = M$, d.h. M ist in der Tat abgeschlossen.

M ist nicht kompakt: Sei $\varepsilon := \frac{\sqrt{2}}{2}$. Dann ist

$$U := \bigcup_{i=1}^{\infty} K(x^i, \varepsilon) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{x^i\} = M$$

eine offene Überdeckung von M. Man kann aus U jedoch nicht endlich viele Kugeln auswählen, die M noch überdecken, daher kann M nicht kompakt sein.

4. Untersuchen Sie das Cauchyprodukt $(3 + \sum_{k=1}^{\infty} 3^k)(-2 + \sum_{k=1}^{\infty} 2^k)$ sowie beide Faktoren auf Konvergenz und bestimmen Sie bei Konvergenz die jeweiligen Werte.

   Lösung:

   Behauptung: Das Cauchyprodukt $(3 + \sum_{k=1}^{\infty} 3^k)(-2 + \sum_{k=1}^{\infty} 2^k)$ ist konvergent und nimmt den Wert -6 an, die Reihen in den Faktoren hingegen sind divergent.

   Beweis: Die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} 3^k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k$ sind divergent, da die Summanden keine Nullfolgen bilden. Für das Cauchyprodukt gilt:

   Schreiben wir das Produkt als $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$, dann ist $c_0 = 3 \cdot (-2) = -6$ und für $n \geq 1$ ist

$$\begin{aligned}
c_n &= 3 \cdot 2^n + \sum_{k=1}^{n-1} 3^k \cdot 2^{n-k} + 3^n \cdot (-2) \\
&= 2 \cdot 2^n + \sum_{k=0}^{n-1} 3^k \cdot 2^{n-k} + 3^n \cdot (-2) \\
&= 2 \cdot 2^n + 2^n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{3}{2}\right)^k - 2 \cdot 3^n \\
&= 2 \cdot (2^n - 3^n) + 2^n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{3}{2}\right)^k \\
&= 2 \cdot (2^n - 3^n) + 2^n \cdot \frac{1 - (3/2)^n}{1 - (3/2)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$