Prof. Dr. Ulrich Horst
Jana Bielagk WiSe 2017/18

Übungen zur Vorlesung
Analysis I*

Serie 1

1) (4 Punkte) Beweisen Sie folgenden Summenformeln:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1), \tag{1}$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4} n^2(n+1)^2. \tag{2}$$

2) (4 Punkte) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, x_2, \dots x_n > 0$. Zeigen Sie, dass:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right) \geq n^2.$$

3) (4 Punkte) Beweisen Sie folgende Eigenschaften aus den Körpereigenschaften der reellen Zahlen:

   i) Die neutralen Elemente der Addition und der Multiplikation sind eindeutig bestimmt.
   ii) Das Negative von $x \in \mathbb{R}$ und das Inverse von $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, sind eindeutig bestimmt.
   iii) $0 \cdot x = 0$ für jedes $x \in \mathbb{R}$.
   iv) Die Gleichung $a + x = b$, $a, b \in \mathbb{R}$, hat genau eine Lösung, nämlich $x = b + (-a) =: b - a$.

4) (4 Punkte) Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

   (O1) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $x \leq y$ oder $y \leq x$.
   (O2) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x \leq x$.
   (M1) Aus $x \leq y$ folgt $x + z \leq y + z$ für alle $z \in \mathbb{R}$.
   (M2) Aus $x \leq y$ folgt $x \cdot z \leq y \cdot z$ für alle $z \in \mathbb{R}^+$.

Bitte schreiben Sie die Lösung jeder Aufgabe auf ein extra Blatt und versehen Sie jedes Blatt mit Ihren Namen und Ihren Matrikel-Nummern.