Prof. Dr. Ulrich Horst WiSe 2017/18
Jana Bielagk

Übungen zur Vorlesung

Analysis I*

Serie 10

1) (4 Punkte) Bestimmen Sie, falls existent, die Grenzwerte folgender reeller Funktionen:

   a) $\lim\limits_{z\to 1} \frac{z^n-1}{z^m-1}$ für $n, m \in \mathbb{N}$.

   b) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x - \sqrt{x^2+4x+5})$.

   c) $\lim\limits_{x\to 2^-} \left[x + (x-[x])^2\right]$, wobei für eine reelle Zahl y das Symbol $[y]$ die größte ganze Zahl k mit $k \leq y$ bezeichnet.

2) (4 Punkte) Seien (X, d) ein metrischer Raum und $f, h : X \to \mathbb{R}$ zwei stetige Abbildungen. Wir definieren die Abbildungen $\max\{f, h\} : X \to \mathbb{R}$ und $\min\{f, h\} : X \to \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned} \max\{f,h\}(x) &:= \max\{f(x), h(x)\}, \qquad x \in X, \\ \min\{f,h\}(x) &:= \min\{f(x), h(x)\}, \qquad x \in X. \end{aligned}$$

   Zeigen Sie, dass $\max\{f, h\}$ und $\min\{f, h\}$ stetige Abbildungen sind.
   Hinweis: Für reelle Zahlen a, b *gilt stets* $\max\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$.

3) (4 Punkte) Die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x^4-10x^2+8}{x^2-4x+3} & \text{falls} \quad x \neq 1 \text{ und } x \neq 3 \\ A & \text{falls} \quad x = 1 \\ B & \text{falls} \quad x = 3 \end{cases}$$

   Können A und B so gewählt werden, dass f stetig ist?

4) (4 Punkte) Untersuchen Sie, ob die Funktionen in $x = 0$ stetig ergänzbar sind:

   i) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$,

   ii) $g(x) = x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$,

   iii) $h(x) = \frac{(1+x)^n-1}{x}$,

   iv) $l(x) = \frac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{x}$.

   Hinweis: Wir gehen hier ausnahmsweise davon aus, dass der Sinus bereits aus der Schule bekannt ist.

Bitte schreiben Sie die Lösung jeder Aufgabe auf ein extra Blatt und versehen Sie jedes Blatt mit Ihren Namen und Ihren Matrikel-Nummern. Schrieben Sie auch die Gruppe auf das Blatt, in welcher Sie Ihre Lösung abholen wollen.