Prof. Dr. Ulrich Horst
Jana Bielagk WiSe 2017/18

Übungen zur Vorlesung

Analysis I*

Serie 11

1) (4 Punkte) Sei $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ eine gleichmäßig stetige Abbildung zwischen zwei metrischen Räumen. Zeigen Sie, dass für jede Cauchy-Folge (x_n) in X die Bildfolge $(f(x_n))$ eine Cauchy-Folge in Y ist.
Gilt dies auch für stetige Abbildungen f? (Begründen Sie Ihre Meinung).

2) (6 Punkte) Wir betrachten die Logarithmus-Funktion $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

   a) $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ist nicht gleichmäßig stetig.

   b) Für jede positive reelle Zahl a ist $\ln|_{[a,+\infty)} : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig.

   c) Ist $\ln|_{[a,+\infty)} : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig?

   Hinweis zu c) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $\ln(1 + x) \leq x$ für $x > -1$ gilt.

3) (4 Punkte)

   a) Zeigen Sie, dass eine Norm auf $\mathbb{R}^d$ eine Lipschitz-stetige Funktion ist.

   b) Überprüfen Sie, ob die Menge der Lipschitz-stetigen Funktionen einen Unterraum der Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ bilden.

   Hinweis zu a) Auf dem $\mathbb{R}^d$ sind alle Normen äquivalent.

4) (4 Punkte) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt *Hölder-stetig* mit dem Exponenten $\alpha > 0$, falls eine Konstante $C \geq 0$ existiert, so dass

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha, \quad \text{für alle } x, y \in I.$$

   a) Zeigen Sie, dass jede Hölder-stetige Funktion gleichmäßig stetig ist.

   b) Finden Sie eine Funktion, die Hölder-stetig, jedoch nicht Lipschitz-stetig ist.

   c) Zeigen Sie, dass jede Hölder-stetige Funktion mit Hölder-Exponenten $\alpha > 1$ konstant ist.

   Hinweis zu c) Ist $I = [a, b]$, dann zerlegen Sie das Intervall in Teilintervalle gleicher Länge.

Bitte schreiben Sie die Lösung jeder Aufgabe auf ein extra Blatt und versehen Sie jedes Blatt mit Ihren Namen und Ihren Matrikel-Nummern. Schrieben Sie auch die Gruppe auf das Blatt, in welcher Sie Ihre Lösung abholen wollen.