

Übungen zur Vorlesung Analysis I*

Serie 12

- 1) (4 Punkte) Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen zwei Mengen. Dann heißt die Menge

$$\text{graph}(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$$

der *Graph von f* .

Sei nun $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen. Zeigen Sie:

- Die Menge $\text{graph}(f) \subset X \times Y$ ist abgeschlossen. ($X \times Y$ sei dabei mit der Produktmetrik versehen).
- Ist der metrische Raum X kompakt, so ist $\text{graph}(f) \subset X \times Y$ ebenfalls kompakt.

- 2) (4 Punkte) Sei $K \subset \mathbb{R}$ eine kompakte Menge und $f : K \rightarrow K$ eine Abbildung mit

$$|f(x) - f(y)| < |x - y| \quad \text{für alle } x, y \in K \text{ mit } x \neq y.$$

Dann besitzt f genau einen Fixpunkt.

Hinweis: Bitte beachten Sie, dass f nicht die Voraussetzungen des Banach'schen Fixpunktsatzes erfüllt!

- 3) (4 Punkte) Sei $f_n : X \rightarrow E$, $n \in \mathbb{N}_0$, eine Folge von Funktionen von einem metrischen Raum X in einen Banachraum E . Zeigen Sie: Ist die Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ gleichmäßig konvergent, so konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ gleichmäßig gegen die Null-Funktion $f = 0$.

- 4) (4 Punkte)

- Die Funktion $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei gleichmäßig stetig. Weiterhin sei die Funktionenfolge $f_n : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) gleichmäßig konvergent. Zeigen Sie, dass $g_n := F \circ f_n$ ($n \in \mathbb{N}$) gleichmäßig konvergiert.
- Zeigen Sie, dass man die gleichmäßige Steigkeit nicht durch Stetigkeit ersetzen kann. Mit anderen Worten: Geben Sie ein Beispiel einer stetigen (aber nicht gleichmäßig stetigen) Funktion F und einer gleichmäßig konvergenten Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ an, für die $g_n := F \circ f_n$ nicht gleichmäßig konvergiert.

Bitte schreiben Sie die Lösung jeder Aufgabe auf ein extra Blatt und versehen Sie jedes Blatt mit Ihren Namen und Ihren Matrikel-Nummern. Schreiben Sie auch die Gruppe auf das Blatt, in welcher Sie Ihre Lösung abholen wollen.