Prof. Dr. Ulrich Horst
Jana Bielagk

WiSe 2017/18

Übungen zur Vorlesung

Analysis I*

Serie 5

1) (4 Punkte) Seien zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$a_n := \frac{(3-n)^3}{3n^3-1}, \qquad b_n := \frac{1+(-1)^n n^2}{n^2+3n+2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Entscheiden Sie, ob die Folgen beschränkt, konvergent und/oder divergent sind. Falls Konvergenz vorliegt, bestimmen Sie den Grenzwert.

2) (4 Punkte)

a) Seien x_1 und c positive reelle Zahlen und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die folgende rekursiv definierte Folge:

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\sqrt{c}$ konvergiert.

b) Berechnen Sie approximativ $\sqrt{7}$, indem Sie für $x_1 = 1$ und $c = 7$ die Zahlen x_2, x_3, x_4, x_5 berechnen.

3) (4 Punkte) Berechnen Sie den Limes der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_0 = 1$ und $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Hinweis: Zeigen Sie, dass $a_n \leq a_{n+1}$ und $a_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

4) ($4 + 1^*$ Punkte)

a) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Zeigen Sie: Ist $x \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt der Menge $\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$, so ist x auch ein Häufungspunkt der Folge (x_n).

*b)** Finden Sie eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit einem Häufungspunkt $x \in \mathbb{R}$, so dass x kein Häufungspunkt der Menge $\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ ist.

c) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

Ist $b > 0$, so gilt $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \infty$; ist $b < 0$, so gilt $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = -\infty$. Kann man für $b = 0$ eine Aussage treffen?

Bitte schreiben Sie die Lösung jeder Aufgabe auf ein extra Blatt und versehen Sie jedes Blatt mit Ihren Namen und Ihren Matrikel-Nummern. Schrieben Sie auch die Gruppe auf das Blatt, in welcher Sie Ihre Lösung abholen wollen.