Prof. Dr. Ulrich Horst WiSe 2017/18
Jana Bielagk

Übungen zur Vorlesung
Analysis I*

Serie 6

1) (4 Punkte) Bestimmen Sie in $\mathbb{R}$ den Abschluss, den Rand und das Innere der folgenden Mengen:

$$A := \left\{ \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \mid m, n \in \mathbb{N} \right\}, \qquad B := \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1} \right].$$

2) (4 Punkte)
   a) Gegeben sei eine reelle Zahlenfolge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $|x_k - x_{k+1}| \leq 2^{-k}$ für $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.
   b) Zeigen Sie: Eine Zahlenfolge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, wenn die drei Teilfolgen $(x_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(x_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(x_{3k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergieren.

3) (4 Punkte) Seien (X, d) ein metrischer Raum und M die Menge der Cauchy-Folgen in (X, d), d.h.

$$M := \{(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X \mid (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ Cauchy-Folge bezüglich } d\}.$$

   a) Zeigen Sie, dass für zwei Cauchy-Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}, (y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in M$ der Grenzwert $\lim_{k\to\infty} d(x_k, y_k)$ in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ existiert.
   b) Wir definieren $d_M \colon M \times M \to \mathbb{R}$ durch

$$d_M((x_k)_{k\in\mathbb{N}}, (y_k)_{k\in\mathbb{N}}) := \lim_{k\to\infty} d(x_k, y_k).$$

   Zeigen Sie, dass d_M eine Pseudometrik ist, d.h. dass d_M alle Eigenschaften einer Metrik besitzt mit einer Ausnahme: Aus $d_M((x_k)_{k\in\mathbb{N}}, (y_k)_{k\in\mathbb{N}}) = 0$ folgt nicht $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} = (y_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

   Hinweis zu b): Die Vierecksungleichung von Aufgabenblatt 3 darf verwendet werden.

4) (4 Punkte) Für $x := (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und eine rationale Zahl $p > 0$ definieren wir

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

   Seien $p, q > 0$ rationale Zahlen mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Zeigen Sie, dass für alle $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ folgende Ungleichungen gelten:

a) $\sum_{k=1}^{n} |x_k| \cdot |y_k| \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q$;

b) $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$.

Hinweis: Für alle $a, b \in \mathbb{R}^+$ und p, q wie oben gilt $a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$. Dies darf ohne Beweis verwendet werden.

Bitte schreiben Sie die Lösung jeder Aufgabe auf ein extra Blatt und versehen Sie jedes Blatt mit Ihren Namen und Ihren Matrikel-Nummern. Schrieben Sie auch die Gruppe auf das Blatt, in welcher Sie Ihre Lösung abholen wollen.