Prof. Dr. Ulrich Horst
Jana Bielagk WiSe 2017/18

Übungen zur Vorlesung

Analysis I*

Serie 7

1) (4 Punkte) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte reelle Folge. Zeigen Sie:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} \sup\{a_n :\ n \geq k\} = \inf_{k\in\mathbb{N}} \sup\{a_n :\ n \geq k\},$$
$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} \inf\{a_n :\ n \geq k\} = \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf\{a_n :\ n \geq k\}.$$

2) (5 Punkte) Sei X eine nichtleere Menge. Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt *beschränkt*, wenn es eine reelle Konstante C gibt, so dass $|f(x)| \leq C$ für alle $x \in X$. Wir bezeichnen mit $B(X)$ die Menge aller reellwertigen, beschränkten Funktionen auf X,

$$B(X) := \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ beschränkt}\}$$

und mit $d_\infty : B(X) \times B(X) \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$d_\infty(f, h) := \sup\{\, |f(x) - h(x)| \mid x \in X\}.$$

   a) Zeigen Sie, dass d_∞ korrekt definiert ist (d.h., dass das Supremum existiert).
   b) Zeigen Sie, dass d_∞ eine Metrik auf $B(X)$ ist.
   c) Zeigen Sie, dass der metrische Raum $(B(X), d_\infty)$ vollständig ist.

3) (4 Punkte) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Beweisen Sie:

   a) Die Vereinigung endlich vieler kompakter Teilmengen von X ist kompakt.
   b) Der Durchschnitt beliebig vieler kompakter Teilmengen von X ist kompakt.

   Kann man die Voraussetzung *endlich viele* in Punkt a) durch *abzählbar viele* oder *beliebig viele* ersetzen? Begründen Sie Ihre Antwort.

4) (3 Punkte) Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz.

   a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{k}$,
   b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{(2k)!} \cdot 2^k$,
   c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{2k+1}\right)^k$.

Bitte schreiben Sie die Lösung jeder Aufgabe auf ein extra Blatt und versehen Sie jedes Blatt mit Ihren Namen und Ihren Matrikel-Nummern. Schrieben Sie auch die Gruppe auf das Blatt, in welcher Sie Ihre Lösung abholen wollen.