Prof. Dr. Ulrich Horst
Jana Bielagk WiSe 2017/18

Übungen zur Vorlesung
Analysis I*

Serie 8

1) (6 Punkte) Sei $\mathcal{F}$ der Vektorraum der reellen Folgen und ℓ^2 die Teilmenge

$$\ell^2 = \left\{ (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F} \mid \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty \right\}.$$

a) Zeigen Sie, dass ℓ^2 ein Untervektorraum des Vektorraumes $\mathcal{F}$ ist.

b) Für $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}, (y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ sei

$$\begin{aligned} \|(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\|_2 &:= \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{und} \\ \langle\, (x_k)_{k\in\mathbb{N}}, (y_k)_{k\in\mathbb{N}} \,\rangle &:= \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot y_k. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_2$ eine Norm und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf ℓ^2 ist.

c) Zeigen Sie, dass $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$ ein Banachraum und $(\ell^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum ist.

Hinweise:

Zu a) Um zu zeigen, dass ℓ^2 ein Untervektorraum ist, muss nachgewiesen werden, dass ℓ^2 nicht leer ist und dass für $x, y \in \ell^2$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ auch $x + y \in \ell^2$ und $\lambda x \in \ell^2$ sind.

Zu b) Die Ergebnisse aus Serie 6 Aufgabe 4 dürfen verwendet werden. Die Ungleichung a) jener Aufgabe nennt man *Hölder-Ungleichung* und die Ungleichung b) *Minkowski-Ungleichung.*

2) (4 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass jede beschränkte Teilmenge von $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ auch total beschränkt ist.

Bemerkung: Dies beweist insbesondere den Satz von Heine-Borel als Spezialfall des Satzes aus der Vorlesung:

Eine Teilmenge von $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

b) Finden Sie ein Beispiel einer beschränkten Menge, die nicht total beschränkt ist.

3) (4 Punkte)

   a) Zeigen Sie, dass jede abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge selbst kompakt ist.

   b) Sei S die abgeschlossene Einheitskugel im ℓ^2, d.h.

$$S := \left\{ x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} : \ \|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq 1 \right\}.$$

   Zeigen Sie (möglicherweise unter Verwendung von a), dass S nicht kompakt ist.

4) (2 Punkte)

   Untersuchen Sie das Cauchyprodukt $(3 + \sum_{k=1}^{\infty} 3^k)(-2 + \sum_{k=1}^{\infty} 2^k)$ sowie beide Faktoren auf Konvergenz und bestimmen Sie bei Konvergenz die jeweiligen Werte.

Bitte schreiben Sie die Lösung jeder Aufgabe auf ein extra Blatt und versehen Sie jedes Blatt mit Ihren Namen und Ihren Matrikel-Nummern. Schrieben Sie auch die Gruppe auf das Blatt, in welcher Sie Ihre Lösung abholen wollen.