Prof. Dr. Ulrich Horst WiSe 2017/18
Jana Bielagk

Übungen zur Vorlesung
Analysis I*

Serie 9

1) (4 Punkte) Berechnen Sie den Konvergenzradius der Reihen und stellen Sie die Konvergenzkreise graphisch dar.

a) $P_1(z) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z-i-1)^k}{k^2}$

b) $P_2(z) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^3 3^k (z+1)^k$

c) $P_3(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n (z-3)^{n^2}$

2) (4 Punkte) In der Vorlesung wurde die Exponentialfunktion als die Potenzreihe $e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ definiert. Sie besitzt jedoch auch eine Darstellung, die analog ist zur Definition der Euler'schen Zahl:

Zeigen Sie, dass für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$e^z = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$

3) (4 Punkte) Bestimmen Sie alle reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$, die die folgenden Gleichungen lösen:

a) $2^{(3^x)} = 3^{(4^x)}$.

b) $2(\log_5 x)^2 + \log_5(x^3) = 2$.

4) (4^* Punkte) Ferdi bekommt auch dieses Weihnachten wieder sehr viele Geschenke, nämlich abzählbar unendlich viele. Die Pakete, die alle würfelförmig sind, stellt Ferdi mit dem Größten, das einen Meter hoch ist, beginnend nach Größe geordnet in einer Reihe unter dem Tannenbaum auf. Er stellt dabei fest, dass die Pakete jeweils ein Drittel so breit sind wie das vorherige. Wie weit müssen die Äste des Tannenbaums mindestens ragen, wenn alle Pakete unterm Baum Platz finden? Beim Auspacken stellt Ferdi fest, dass er beim nachfolgenden Paket immer nur jeweils die Hälfte der Zeit braucht. Wie lange hat Ferdi für das erste Paket gebraucht, wenn er, gierig wie er ist, schon nach 2 Minuten alles ausgepackt hat?

5) (4^* Punkte) Heini bekommt zu Weihnachten von seinem Patenonkel, der unter Heinis Streichen viel leiden musste, einen Würfel von einem Kubikmeter Größe geschenkt. Heini braucht zum Auspacken eine Minute, und im Allgemeinen hängt die Zeit, die Heini zum Auspacken braucht, proportional von der Oberfläche des Päckchens ab. Als er das Paket geöffnet hat, ist in dem Karton wieder ein eingepackter Würfel und $\frac{7}{8}\mathrm{m}^3$ Luft. Und so geht es weiter. Nach dem n-ten Auspacken findet Heini wieder ein würfelförmiges Päckchen und $\frac{3n^2+3n+1}{n^3(n+1)^3}\mathrm{m}^3$ gähnende Leere. Heini versucht, die leeren Kartons aufeinander zu stapeln. Gelingt ihm das? Zudem machen die Eltern sich Sorgen, ob Heini denn rechtzeitig zum Abendspaziergang zum Onkel mit dem Auspacken fertig sein wird. Packt Heini noch an Neujahr? Und warum ist Heini nachher so enttäuscht, dass er nicht mehr mit zum Onkel will?

   Hinweis: Beweisen und verwenden Sie $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \cdot (k-1)} = 1 - \frac{1}{n}$.

*Punktangaben mit * kennzeichnen Zusatzpunkte.*

Bitte schreiben Sie die Lösung jeder Aufgabe auf ein extra Blatt und versehen Sie jedes Blatt mit Ihren Namen und Ihren Matrikel-Nummern. Schrieben Sie auch die Gruppe auf das Blatt, in welcher Sie Ihre Lösung abholen wollen.

Das Team der Analysis I*-Vorlesung wünscht Ihnen

Frohe Weihnachten
und einen Guten Rutsch ins Neue Jahr !!!